DOI: https://doi.org/10.34070/rif.v7i1

ALGUNOS ERRORES MATEMÁTICOS BÁSICOS Y SU MANIFESTACIÓN EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Some basic mathematical errors and their manifestation in higher education

Redel López Garcés, MSc.
Universidad de Oriente, Cuba
https://orcid.org/0000-0002-0202-7982
redelg@uo.edu.cu

Elsa Iris Montenegro Moracén, Dr. C.
Universidad de Oriente, Cuba
https://orcid.org/0000-0002-4258-656X
elsam@uo.edu.cu

Leticia Guillot Mustelier, Dr. C.
Universidad de Oriente, Cuba
https://orcid.org/0000-0003-3812-4861
leticia@uo.edu.cu

Palabras claves: Errores Matemáticos, Obstáculo Epistemológico, Aprendizaje.

Keywords: Mathematical Errors, Epistemological Obstacle, Learning.

Recibido: 30 de mayo de 2018

Aceptado: 19 de septiembre de 2018

RESUMEN

En el artículo se abordan entre otros las definiciones de error, sus características y clasificación, así como algunos modos de actuación de estudiantes y profesores que favorecen la ocurrencia de errores en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, aspecto este que frena el tránsito de los estudiantes por los diferentes niveles del conocimiento. En tal sentido, en el trabajo se ofrecen algunas recomendaciones a los profesores de Matemática para su tratamiento desde la clase, a partir una experiencia acumulada en el trabajo metodológico con el colectivo de la disciplina de Análisis Matemático dirigido a la atención y tratamiento a los errores matemáticos básicos identificados en los estudiantes.

ABSTRACT

In this article it was aborded among others the error definitions, its characteristics and classifications, beside that it was aborded some operation modes of students and teachers that helps the occurrence of errors in the learning teaching process of Mathematics, aspect that brake the transit of the students across different levels of the knowledge. This work offers many recommendations to the Mathematics teachers for its treatment in the class, by an accumulated experience in the methodological work with the collective of the subject Mathematical Analysis pointed to the attention and treatment of the basic mathematical errors that were identified in the students.

INTRODUCCIÓN

Es conocido por todos que la calidad del aprendizaje adquirido por los estudiantes en las educaciones precedentes a la educación superior constituye una premisa esencial para obtener éxitos en este nivel.

En particular, con respecto a la Matemática es necesario para el aprendizaje de los nuevos contenidos que éstos realicen acciones como son las operaciones de cálculo en los diferentes dominios numéricos y con números expresados en diferentes notaciones, descomponer polinomios en factores, simplificar fracciones algebraicas, resolver ecuaciones de diferentes tipos (lineales, cuadráticas, fraccionarias, modulares, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, entre otras), aplicar propiedades, representar funciones elementales y analizar sus propiedades esenciales, en fin, deberán poner en acción lo aprendido hasta ese momento.

Estudios realizados por diferentes investigadores demuestran que el proceso de aprendizaje es muy complejo y que la forma en que cada estudiante aprende es muy variada, tan variada como la matrícula de la clase.

Porque algunos estudiantes aprenden más rápido que otros, lo que puede ser interesante para una parte de la clase para la otra parte no lo es, unos aprenden con relativa facilidad un teorema, un procedimiento, una propiedad y para otros se le hace más difícil y adquieren un conocimiento con insuficiencias, sin la calidad requerida que más tarde son obstáculos para enfrentar nuevos aprendizajes.

En uno u otro de los casos abordados existe la posibilidad de cometer errores, pues éstos no son casuales, muchos de ellos se producen a partir de aplicar conocimientos y experiencias precedentes, otros están asociados a dificultades didácticas, epistemológicas, cognitivas. Otras se deben a la actitud del estudiante hacia la materia de enseñanza, al desempeño del docente, entre otras.

En el presente trabajo se trata entre otras cosas la definición error dada por diferentes investigadores tanto nacionales como internacionales, algunos modos de actuación de estudiantes y docentes que favorece la ocurrencia de errores matemáticos en el proceso de enseñanza aprendizaje, se aborda una clasificación general de errores y se ejemplifica con contenidos de la educación media superior y la superior.

Los métodos investigativos de análisis y síntesis; inducción deducción; el criterio de especialistas; las entrevistas a alumnos y docentes permitieron corroborar los resultados investigativos alcanzados.

Finalmente, el trabajo ofrece a los docentes de los diferentes niveles algunos modos de actuación con el objetivo de favorecer la calidad del aprendizaje matemático de sus estudiantes, y, por lo tanto, disminuir la ocurrencia de errores para lo cual se proponen recomendaciones metodológicas.

DESARROLLO

Error, etimológicamente significa “concepto equivocado o juicio falso, acción desacertada o equivocada (1)”. Este término, ha sido tratado en el ámbito escolar desde la asignatura Matemática, por diferentes investigadores que lo han definido y clasificado desde disímiles posiciones, ya sea por su naturaleza, su posible origen o por sus causas.

En este sentido, se pueden citar en el orden internacional a: Socas, M (1997); Rico, L (1995); Brousseau, G y otros (1986); Popper, K (1979); Lakatos, I (1978); Radatz, H (1979), Bachelard, G (1988); entre otros, y en el orden nacional Álvarez, M (2004), entre otros. Sus ideas apuntan de forma general a que el mismo es una práctica que no es válida, una concepción limitada, esquema cognitivo inadecuado, procedimiento sistemático imperfecto, o bien que son defectos o averías y que son elementos usuales en el camino hacia el verdadero conocimiento.

Mención aparte a partir de su relación con este trabajo merecen dos definiciones que se presentan a continuación:

Oser (1997) citado por (Álvarez, 2004) sostiene que los errores de los alumnos son expresión de la ausencia de un conocimiento negativo, entiéndase aquel que permite saber en cuáles condiciones un concepto no es válido o una acción es incorrecta. Dicho con otras palabras, “qué no debe ser” o “qué no funciona”.

Este conocimiento negativo ejerce según él una función de protección del conocimiento positivo; permite identificar el concepto o relación falsa y posibilita evitar el procedimiento incorrecto (2). Según Godino y otros (2003) “Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución Matemática escolar” (3).

Es importante también abordar la caracterización general de los errores cometidos por los estudiantes dada por Mulhern (1989) al plantear que los errores surgen en la clase generalmente de manera espontánea y sorprenden al profesor, son persistentes, particulares de cada individuo y difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno, predominan los errores sistemáticos (revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada, en general, son resultado de concepciones inadecuadas de los fundamentos de la Matemática, reconocibles o no reconocibles por el profesor) con respecto a los errores por azar u ocasionales.

Los alumnos en el momento no toman conciencia del error, algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que da el profesor, los alumnos recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesor.

Otras características de los errores según el criterio del autor de este trabajo son que algunos de estos se producen porque se transfieren de un conocimiento precedente a uno nuevo y que tienen un carácter intra e interdisciplinario, pues un mismo error puede manifestarse en diferentes áreas de una disciplina y en disciplinas afines,

Ejemplo

Un estudiante que presenta errores de cálculo, que presenta dificultades en el despeje, en el trabajo con magnitudes, etc, los transfiere desde la Matemática hasta la Física, la Química y otras ciencias que utilizan estos contenidos como herramientas para explicar y aplicar su teoría.

Hablar de causas de los errores arroja un sin número de elementos que pueden ser considerados posibles causales.

Estudios realizados por Bachelard, 1988, citado por Rico, 1995 apuntan que los errores se deben a obstáculos, en este sentido, introdujo el concepto de obstáculo epistemológico y lo define como “entorpecimientos y confusiones, que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, provienen de una tendencia a la inercia:

Se conoce en contra de un conocimiento anterior (insuficiente o adquirido deficientemente) que ofrece resistencia, la mayoría de las veces porque se ha fijado en razón de haber resultado eficaz hasta el momento; cuando se lo pretende utilizar en un contexto o una situación inadecuados, se produce el error” (4).

Brousseau tomó las ideas de Bachelard y las desarrolló en el ámbito específico del aprendizaje de la Matemática.

En su trabajo distingue entre obstáculos de origen psicogenético, que están vinculados con el estadio de desarrollo del aprendiz, los de origen didáctico, vinculados con la metodología que caracterizó al aprendizaje, y los de origen epistemológico, relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la Matemática, en la génesis misma de los conceptos.

En todos los casos se destaca el carácter de resistentes que presentan estos obstáculos, y es necesaria su identificación, para luego alcanzar los nuevos conocimientos a partir de su superación.

Muchos estudiosos del tema coinciden que el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática es muy complejo y en el mismo intervienen muchas variables, cada una con su incidencia que puede favorecer un aprendizaje con calidad o entorpecerlo, cuando ocurre este último caso se pueden generan muchos errores y dificultades.

Según Soca (1997), su naturaleza es de diversa índole y se concretan y refuerzan en redes complejas, agrupándolas en cinco categorías, las dos primeras referidas a la disciplina, en este caso a los objetos matemáticos y a los procesos del pensamiento, la tercera relacionada con la enseñanza, la cuarta con los procesos cognitivos de los estudiantes y una quinta que guarda estrecha relación con la falta de una actitud racional hacia la Matemática.

Tomando como referencia lo anterior a continuación se hará referencia a algunas insuficiencias asociadas al desempeño de profesores y estudiantes que pueden convertirse en obstáculos y favorecer la ocurrencia de errores.

También se abordarán algunas características del contenido de enseñanza que tienen incidencia en los mismos.

Se abordarán atendiendo a tres categorías que guardan estrecha relación con los componentes personales y no personales del proceso de enseñanza aprendizaje, ellas son desempeño del profesor y desempeño del estudiante y contenido de enseñanza.

Dentro de las insuficiencias asociadas al desempeño del docente se pueden referir:

- No saber qué conocen sus estudiantes en relación con los antecedentes del tema objeto de estudio, cómo lo conocen, qué saben hacer con lo que conocen, qué errores cometen, es decir no tener un diagnóstico certero de éstos en cuanto a sus insuficiencias y potencialidades, para en este sentido dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje en función de prestarles la ayuda necesaria.

- No ser sistemático en la discusión colectiva de las soluciones propuestas a los ejercicios y problemas resueltos de forma independiente por los estudiantes, por lo tanto, no aprovecha las potencialidades que tiene la crítica, el debate y la reflexión para poner al descubierto las insuficiencias que se cometen al aplicar un concepto, un procedimiento, una propiedad, etc.
- No generalizar el procedimiento de solución de determinado contenido, predominando la enseñanza de ejercicios tipos.
- Aplicación automática de reglas, algoritmos, procedimientos, sin profundizar en las condiciones necesarias que deben cumplirse para su aplicación.
- Enseñar la búsqueda de la respuesta correcta como única alternativa y no explotar otras (aunque no sean válidas) que pueden producirse si no se aplica correctamente un procedimiento o una propiedad, por lo tanto, no aprovecha las bondades de los errores en el aprendizaje de la Matemática, al no tener en cuenta que estos son parte inseparable del proceso de aprendizaje, constituyen una valiosa fuente de información sobre el grado de asimilación del contenido de enseñanza por parte de los estudiantes pero además permite valorar la calidad de la enseñanza, que son recursos para la motivación, ofrecen una valiosa oportunidad para el desarrollo de la expresión oral de los estudiantes si se aprovechan los mismos para la explicación, argumentación, ejemplificación, son en definitiva señales que indican hacia dónde dirigir un proceso de enseñanza aprendizaje con calidad.
- No estructurar adecuadamente los contenidos que quiere enseñar.
- No considerar en la enseñanza, la necesidad e importancia de la estimación y predicción de resultados.
- No considerar metodológicamente la comprobación de los procedimientos.
- Orientar la resolución de muy pocos problemas de aplicación de la materia de enseñanza, provocando en los estudiantes la apatía, la no motivación y el desinterés al no percibir su aplicación práctica.

Dentro de las insuficiencias asociadas al desempeño del estudiante se puede expresar:

Freudenthal, 1987, citado por Espinosa, 1996 plantea que algunos procedimientos erróneos de los estudiantes pueden ser una fiel imagen de los de sus maestros.

Teniendo en cuenta lo anterior se abordarán a continuación algunas dificultades en el aprendizaje de los estudiantes que pueden ser consecuencia de una inadecuada influencia del profesor y propician enfoques de aprendizaje que se convierten en obstáculos para un aprendizaje desarrollador y por lo tanto favorecen la ocurrencia de errores.

1. La labor independiente caracterizada por la tendencia a memorizar en lugar de comprender el contenido.
2. No tener en cuenta los procedimientos generales de resolución de determinados ejercicios, aprende mediante la repetición de ejercicios tipos, cometiendo errores cuando cambian las condiciones dadas.
3. Aprendizaje formal de conceptos, proposiciones, definiciones, métodos y procedimientos en especial algoritmos y reglas. Lo anterior se evidencia cuando el estudiante no es capaz de explicar, argumentar, ejemplificar, pero si repetir formalmente lo que le enseñan, o sea, aprende la forma, pero no el contenido.
4. Exposición mecánica externa del contenido de enseñanza, mediante palabras, símbolos, figuras, provocando la omisión de elementos del conocimiento y de condiciones necesarias.
5. Aplicación automática de procedimientos de solución de un modelo matemático dado, sin analizar su pertinencia.

Nadie está garantizado para no cometer errores en el proceso de asimilación de un conocimiento, en el mismo pueden asumirse como válidas determinadas reglas, procedimientos, propiedades, conceptos y definiciones, entre otras, que sean erróneas, lo que potencia la aparición de errores y equivocaciones.

Acerca de las potencialidades del contenido de enseñanza para la comisión de errores

Algunas características del contenido de enseñanza que pueden favorecer la comisión de errores por parte de los estudiantes, son las siguientes:

1. La gran variedad de conceptos y sus definiciones, propiedades, reglas, algoritmos, proposiciones, especialmente los teoremas, que deben ser asimilados por los estudiantes.
2. La dificultad de algunos contenidos caracterizada por la poca vinculación con la experiencia, conocimientos y aptitudes precedentes. (ejemplo trigonometría, logaritmos, etc.)
3. La significación del contenido (utilidad e importancia). Al no demostrarse su aplicación con ejemplos prácticos puede provocar indiferencia, desinterés, desmotivación y por lo tanto un aprendizaje que puede conducir a errores.

Clasificación general de los errores en el aprendizaje de Matemática

En la revisión bibliográfica sobre investigaciones desarrolladas en torno al tema, se presentan diferentes clasificaciones sobre los errores en el aprendizaje de la Matemática, asumiéndose las categorías generales que ofrece Radatz (1979) por la coincidencia de éstas con los errores específicos identificados (5).

1. Errores debido a las dificultades en el lenguaje (El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje).
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial (Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades en la realización de tareas matemáticas. Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas).
3. Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.
4. Errores debido a asociaciones incorrectas o a su rigidez de pensamiento. La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado. Están inhibidos para el procesamiento de nueva información. En general son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Interesan cinco subtipos:

   - Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
   - Errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.
   - Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
   - Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
   - Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas. Son errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Surge con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Algunos errores específicos identificados en la muestra estudiada

1. Uso incorrecto de los signos y símbolos matemáticos.

En este caso el error se produce cuando no tienen en cuenta que, aunque se utilicen los mismos signos (de operaciones de cálculo, de relación y de agrupación) sus usos en una y otra área de la Matemática tienen algunas diferencias y dependen en el caso del cálculo algebraico de determinadas condiciones.

En el cálculo con números reales siempre es posible calcular, sin embargo, estos mismos signos en el cálculo algebraico no siempre pueden efectuarse si no se conoce el valor de la variable o si no son términos semejantes, en casos como.

En la aritmética se puede establecer desde un primer momento la relación de orden que se establece entre dos números, es decir, En el álgebra esta relación no siempre se puede establecer si no se tienen en cuenta condiciones que debe cumplir la variable.

Ejemplo

En situaciones como $13x \;\; y \;\; 5x$ no se puede establecer la relación entre estos términos si no se conoce el valor o los valores que puede tomar “x”.

Con respecto a los signos de agrupación los principales errores se deben a tener en cuenta que en el cálculo aritmético se eliminan preferentemente efectuando las operaciones que encierran, o sea, indican un orden, sin embargo, este mismo signo en el álgebra como generalmente los términos que encierran no son semejantes se requiere eliminar primeramente los paréntesis y luego reducir términos semejantes siempre que sea posible.

Ejemplos que ilustran este tipo de error en el nivel medio superior.

a) $13x + 45 = 58x$

b) Considerar válidas las inecuaciones $-x < 0 \;\; y \;\; x > 0$, sin tener en cuenta las condiciones que debe cumplir la variable "x".

c) Suprimir signos de agrupación arbitrariamente, en casos como:

$$13 + (45 - 12{,}3\ .\ 5) : 12 = 13 + 45 - 12{,}3\ .\ 5 : 12$$
$$3x - (4x + 5y) = 3x - 4x + 5y$$

d) Otro de los errores se produce al no introducir paréntesis en casos que así lo requieren:

Manifestaciones de este tipo de error en el nivel universitario.

(Omisión de paréntesis)

2. Uso incorrecto de conceptos, proposiciones, definiciones, métodos y procedimientos en especial algoritmos y reglas

En este sentido los errores se producen porque muchos estudiantes aprenden la forma de expresar el conocimiento matemático omitiendo condiciones y no penetran en su contenido, es decir utilizan variables que le sirven de forma externa de expresión:

Ejemplo

En lugar de plantear que el teorema de Pitágoras plantea que "en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos" se aprenden la siguiente relación $c^2 = a^2 + b^2$, de igual forma en lugar de aprender que el área de todo triángulo es igual al semiproducto de un lado por la altura relativa a ese lado plantean que $A = \frac{b.h}{2}$, entre otras, no logrando aplicarlo correctamente cuando se utilizan otras variables.

De igual forma utilizan palabras con algunas condiciones omitiendo otras esenciales, por ejemplo, es muy frecuente escuchar a los estudiantes plantear que signos iguales positivo, signos diferentes negativos para referirse a las operaciones de cálculo con números reales, bases iguales se suman en el cálculo con potencias, entre otras.

Ejemplos que ilustran este tipo de error en el nivel medio superior

En lo referente al cálculo por el no dominio adecuado de las reglas de cálculo se pueden ilustrar errores como los siguientes (6):

- Colocan de forma incorrecta los sumandos en columnas para sustraer porque se guían por el orden en que aparecen los números en el ejercicio de cálculo cometiendo el error de poner en ocasiones el número de menor módulo encima. Para calcular por ejemplo $12{,}3 - 20{,}5$ en el cálculo auxiliar escriben $\begin{array}{r} - \; 12{,}3 \\ \underline{20{,}5} \end{array}$
- Cuando se combina un entero con una expresión decimal escriben el número entero debajo de la parte decimal y viceversa o introducen erróneamente una coma decimal al número entero.

Si desean calcular $12{,}65 + 23$ escriben $\begin{array}{r} 12{,}65 \\ \underline{+23} \end{array}$, o bien $\begin{array}{r} 12{,}\ 65 \\ \underline{+2{,}3\ \ } \end{array}$

- En la multiplicación omiten la coma decimal, introducen erróneamente la coma decimal en el producto u omiten el signo del producto.
- En la división efectúan la operación sin expresar al divisor en un número entero, amplían el dividendo y no el divisor y viceversa o los amplían a ambos por factores diferentes, omiten los ceros en cocientes como $123123 : 123$ obteniendo como resultado 11, introducen erróneamente ceros en el cociente (3,6 : 0,3 = 0,12), cuando el dividendo es menor que el divisor (ejemplo $\frac{3}{6{,}9}$) invierten los términos (o sea, efectúan $\frac{6{,}9}{3}$). En

las operaciones combinadas no tienen en cuenta el orden de las operaciones, ejemplo $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{4}=2$), de igual forma en ejercicios de cálculo que contienen operaciones encerradas entre paréntesis eliminan arbitrariamente el paréntesis y por tanto no se rigen por el orden inicial concebido en el ejercicio ni del signo correspondiente bajo las condiciones dadas.

- Otros de los tipos de errores se encuentran los llamados errores de cancelación.

Ejemplos: $\frac{a^2+ab}{ab}=\frac{\cancel{a}^{\cancel{2}}+a\cancel{b}}{\cancel{a}\,\cancel{b}}=2a$, o bien, $\frac{a^2+ab}{ab}=\frac{a^2+\cancel{a}\cancel{b}}{\cancel{a}\,\cancel{b}}=a^2+1$

- Al calcular los ceros de la función que tiene por ecuación el estudiante conoce que los ceros de una función son los elementos del dominio de definición de la función cuya imagen es cero, por lo tanto, automáticamente hace y= 0 y resuelve la ecuación resultante, asumiendo como ceros de la función el conjunto solución de dicha ecuación.

  En el ejemplo dado se obtiene:

  $$|x+5|+3=0$$
  $$|x+5|=-3$$

  Aplicando la definición de módulo se cumple que:

  Si $x+5\geq 0$ entonces $x+5=-3$, luego

  Si $x+5<0$ entonces $-(x+5)=-3$, luego $x+5=3$, de donde $x=-2$

  Obteniendo como resultados -8 y -2, que no son válidos porque carece de sentido por qué.

Manifestaciones de este tipo de error en el nivel universitario.

- (Aplican la regla L´Hospital sin tener en cuenta las condiciones que deben cumplirse, es decir, que el numerador y el denominador tiendan simultáneamente a cero o a infinito cuando x tienda a 2).
- (Error de cancelación.)
- (Aplican incorrectamente la propiedad distributiva de la adición con respecto a la división.)

3. Inadecuada generalización de reglas y procedimientos.

Dentro de estos errores se encuentran los llamados errores de linealidad y de extensión del producto nulo.

Ejemplos que ilustran este tipo de error en el nivel medio superior.

Errores de linealidad:

De la propiedad válida $\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ la generalizan a casos como $\sqrt[n]{a\pm.b}=\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$ de $(a.b)^n=a^n.\,b^n$ la utilizan en casos como $(a\pm.b)^n=a^n\pm b^n$

Estos mismos errores se aprecian además en situaciones como $[f(x).g(x)]'=f'(x).g'(x)$, $\log(x\pm y)=\log(x)\pm\log(y)$, $\frac{1}{x\pm y}=\frac{1}{x}\pm\frac{1}{y}$

Vol. 6 No. 3, ISSN 1390-9789, Diciembre de 2018

Otras manifestaciones de estos errores son de $2^x = 2^y \rightarrow x = y$ que es válido, la aplican por analogías (que no siempre es efectiva) a situaciones no válidas como $x^2 = y^2 \rightarrow x = y,\ \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^y \rightarrow x > y$, entre otros.

Manifestaciones de este tipo de error en el nivel universitario.

- Error de linealidad

Algunas recomendaciones a los profesores de los niveles medio superior y superior para enfrentar estos errores

1. Partir siempre del diagnóstico del aprendizaje no como un momento determinado, sino como un proceso continuo y para ello no basta solo con una prueba pedagógica para conocer de logros alcanzados en el aprendizaje, es necesario explotar además otras fuentes como la revisión de libretas para analizar las notas que toman, las respuestas de las tareas, los razonamientos hechos para resolver determinados ejercicios, las opiniones de los profesores que inciden sobre el grupo docente (teniendo en cuenta el papel de la Matemática como herramienta necesaria para otras disciplinas y asignaturas a la hora de explicar su teoría), las respuestas orales donde se le solicite al estudiante que explique sus razonamientos, el estudio detallado de exámenes escritos(para identificar los errores que cometió, en qué contenidos, la lógica seguida para resolver los ejercicios y problemas propuestos), entrevistas para conocer la motivación por la asignatura, qué contenidos le resultan más difíciles, entre otras.
2. Establecer los espacios de tiempo tanto dentro de la clase como fuera de ella para el análisis individual con los estudiantes de los resultados de sus producciones (realizadas durante el trabajo independientes, en las evaluaciones sistemáticas, parciales y finales), donde él pueda responder interrogantes tales como ¿dónde me equivoqué?, ¿a qué se debió el error cometido?, ¿cuál debe ser la respuesta correcta?, ¿cómo puede superar esos errores? Lo anterior puede motivarlos para superar sus dificultades.
3. Tener presente que no toda ejecución demuestra tener comprensión. El estudiante puede resolver bien una tarea haciéndola igual que otra que había resuelto antes, porque se debe resolver precisamente por ese procedimiento. Entre la comprensión de reglas, leyes, algoritmos, entre otros, expresados verbalmente y su aplicación práctica puede haber divergencias, de ahí que para apreciar el grado de comprensión es preciso explotar sus dos manifestaciones: la explicación verbal y su ejecución en la práctica, por lo tanto es necesario exigir a los estudiantes que expliquen los procedimientos utilizados en la resolución de los ejercicios, pues en ocasiones el empleo de procedimientos falsos conducen a respuestas correctas en determinados ejercicios y al aplicarlos a otros se producen los errores.

   Ejemplo: $2^2 = 4$ porque la base por el exponente es 4, o sea, 2 . 2 =4, al aplicar este razonamiento a otro caso como 2^3 plantean que $2^3 = 6$ porque 2 . 3 = 6, que es un resultado incorrecto.
4. Poseer una compilación de la forma en que se manifiestan los errores más comunes, de manera que en la preparación de la asignatura pueda prever los posibles errores que pueden cometerse en relación con el contenido que va a enseñar y de los contenidos previos que debe dominar el estudiante que sirven de punto de partida para en este sentido, prestar la atención necesaria durante la impartición de los contenidos, la revisión colectiva de los ejercicios y tareas docentes, así como en el tratamiento diferenciado a sus estudiantes.
5. Proponer ejercicios resueltos con errores para que los estudiantes lo identifiquen, la orden del ejercicio podría ser: “Identifica el error”, “¿Qué error se cometió?, ¿Dónde está el error?, ¿A qué se debe el error?, ¿Qué regla o algoritmo se ha utilizado incorrectamente?, ¿Por qué es falso el resultado del siguiente ejercicio?, otras. La discusión con los estudiantes de ejercicios con esas características es una valiosa fuente de conocimiento y sirve de alerta a los estudiantes para no cometerlos.
6. Al abordar un tema, es preciso sistematizar los principales conceptos, definiciones y propiedades que tengan relación con éste, teniendo en cuenta que en muchas ocasiones los estudiantes operan con conceptos sin dominar sus definiciones y propiedades esenciales, lo que trae consigo la comisión de errores.
7. Cuando vaya a enseñar un procedimiento insistir con los estudiantes todas las condiciones necesarias que deben cumplirse para aplicar determinada regla o propiedad. Una manera de prevenir la ocurrencia de errores sería la discusión y análisis con los estudiantes de diferentes situaciones que se pueden presentar, para que estos comprendan que no siempre se puede proceder directamente al aplicar cierta propiedad, que en muchas ocasiones es preciso realizar transformaciones equivalentes para lograr las condiciones necesarias que posibiliten su aplicación.

8. Tener en cuenta que la igualdad es simétrica, es decir a=b es idénticamente equivalente a b=a, de ahí que sea necesario al abordar las propiedades tener en cuenta las dos direcciones, pues el estudiante se habitúa por ejemplo a calcular $\log 16 - \log 2 = \log 8$ y no siempre es capaz de percatarse que $\log 8 = \log 16 - \log 2$
9. Utilizar ampliamente la comparación y la contraposición al abordar los contenidos. Según Ushinski (1950) “En este mundo lo conocemos todo por medio de la comparación, si se nos presenta cualquier nuevo objeto que no pudiéramos igualar a algo o diferenciar de algo, no podríamos formar ningún juicio, ni tener ningún pensamiento acerca de ese objeto, sobre él”
10. Tener en cuenta que el éxito de la ejercitación no depende tanto de su número, como de que esté bien organizada. Tiene una gran significación que la misma sea variada, como señaló Ushiski cuando señaló: “No hay necesidad de repetir lo ya aprendido en el mismo orden en el que se aprendió; por el contrario, es mucho más ventajoso repetirlo de una manera casual, de tal modo que lo aprendido entre a formar parte de nuevas combinaciones, o sea, aquello que ya hemos aprendido debe utilizarse constantemente”.
11. Hacer todo lo posible para que en las respuestas a interrogantes que formule y en los ejercicios que proponga a sus estudiantes participen aquellos estudiantes que presentan mayor dificultad y aprovechar el espacio para estimular los avances que pueda experimentar, esto logra motivarlos y le da una mayor disposición para esforzarse más.
12. Los errores que se manifiestan en la Matemática tienen su manifestación en otras disciplinas al aplicar fórmulas, algoritmos, procedimientos, propiedades, reglas de cálculos, etc., de ahí la necesidad de buscar el apoyo en otros profesores (interdisciplinariedad), para lograr la unidad de acción en torno a su tratamiento.
13. Elaborar ejercicios de forma intencional, que potencien la aparición de los errores y aprovechar su tratamiento como una vía para lograr el aprendizaje de sus estudiantes bajo la concepción de que los errores son una valiosa fuente para lograr un aprendizaje con calidad.

CONCLUSIÓN

Superar las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje debe ser una meta que deben trazarse tanto estudiantes como profesores, pues no tendría sentido hablar de calidad del proceso de enseñanza aprendizaje si no se le presta la atención requerida, ni prevemos con antelación los posibles errores que puedan cometerse al abordarse un tema determinado, además hay que tener en cuenta que generalmente lo anterior está estrechamente vinculado con algunos modos inadecuados de actuación de profesores y estudiantes que se convierten en barreras en la asimilación del conocimiento y para un aprendizaje posterior.

BIBLIOGRAFÍA

1. Diccionario Enciclopédico Larousse Conciso Ilustrado (2001). Primera Edición. México, DF.
2. Álvarez, M y Rodríguez, F. (2004). Las causas de los errores matemáticos de los alumnos. La Habana. Material en soporte digital.
3. Tratamiento de los errores frecuentes en el aprendizaje...Recuperado de: – CubaEduca. pdfhttp://www.cubaeduca.cu/medias/pdf/4783.pdf
4. Del Puerto, S. Lilia Minnaard, C. Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf, el 26 de enero 2011.
5. Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Recuperado 26 de enero de 2011, desde http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF.
6. López, R. (2008). Alternativa metodológica para el tratamiento a los errores de cálculo de los estudiantes. Tesis de Maestría en Ciencias de la Educación. Universidad de Ciencias Pedagógicas Frank País García. Santiago de Cuba.